

有限体積法による多孔質媒体中の二相流モデルの解析

日本女子大学大学院 理学研究科 数理・物性構造科学専攻

森村晃子 (Akiko MORIMURA) *

概要

筆者はこれまで多孔質媒体中の水分移動を記述する二相流モデルについて研究を進めてきた。このモデルは水と空気に対する質量保存則から得られる 2 本の拡散方程式からなり、それらの拡散係数は未知関数に依存する。本稿ではこの方程式系に対し、空隙内での空気密度が空気の含有率に比例するという仮定のもと、Robin 型境界条件を伴う初期値境界値問題を導出する。さらに、有限体積法によって構成される近似解を用いて弱解の存在を示す。なお、本稿は愛木豊彦教授 (日本女子大学) と荏原製作所との共同研究に基づく。

1 導入

多孔質媒体とはスポンジのように小さい孔が数多く空いている物質のことである。多孔質媒体は構造が複雑であるため、その内部に水が浸透する場合、その流れは通常の媒体中 (パイプなど) とは異なる。この現象を記述する数理モデルは既にいくつか提案されている [2, 5, 11]。本研究では多孔質媒体の一つであるレンガに水が浸透していく様子を表す偏微分方程式モデルを取り扱う。

Green–Dabiri–Weinaug–Prill [6] や Fukui–Iba–Hokoi–Ogura [3] は、レンガ内部の水の浸透と空気圧の関係を考えるために、多孔質媒体内の孔の割合を表す空隙率と実験環境の温湿度は一定、なおかつ空間水平方向の変化は一様という仮定のもと、以下の空間一次元の二相流モデルを提唱した。

$$\partial_t m_w(u) + \partial_x q_w = 0, \quad \partial_t m_a(u) + \partial_x q_a = 0, \quad (1)$$

$$q_w = -\lambda(\psi_w(u))\partial_x P_w, \quad q_a = -k(\psi_w(u))\partial_x P_a, \quad (2)$$

$$q_w(t, 0) = 0, \quad q_a(t, 0) = 0, \quad (3)$$

$$q_w(t, 1) = C_w(P_w(t, 1) - \hat{P}_w), \quad q_a(t, 1) = C_a(P_a(t, 1) - \hat{P}_a), \quad (4)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad m_a(0, x) = m_{a0}(x), \quad (5)$$

$$P_a - P_w = -\rho_w u, \quad P_a = \rho_a RT, \quad \psi_w + \psi_a = \phi, \quad m_w = \rho_w \psi_w, \quad m_a = \rho_a \psi_a. \quad (6)$$

ここで、 u は水分化学ポテンシャル; m_w, m_a は水と空気の質量; q_w, q_a は水と空気の流束; ψ_w, ψ_a は水と空気の含有率; λ, k は水と空気の拡散係数; P_w, P_a は水と空気の圧力; ρ_w, ρ_a は水と空気の密度を表す。ただし ρ_w は正定数であると仮定する。また、 $R, T, \phi, C_w, \hat{P}_w, C_a, \hat{P}_a$ は正定数である。

この数理モデルの未知関数は水分化学ポテンシャル u と空気の質量 m_a である。時間発展の支配方程式は質量保存則 (1) であり、流束はダルシー則 (2) に従う。また、含水率 ψ_w は以下の図 1 のグラフ

* E-mail: m1716096ma@ug.jwu.ac.jp

をもつ有界な関数である。

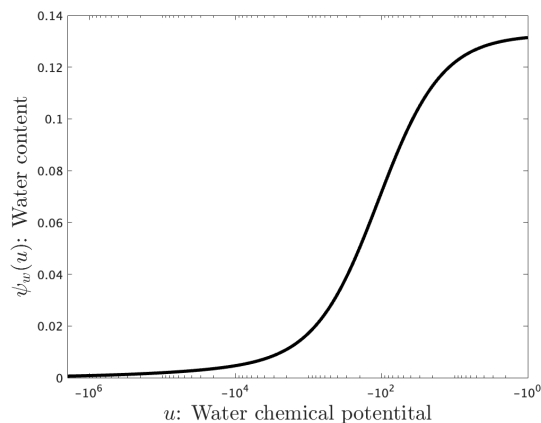


図1 ψ_w のグラフ [3]

さらに、水の拡散係数 λ は図2のグラフのような関数である。一般的に、多孔質媒体への液体浸透を考える際は図3のようなグラフで表される拡散係数を用いる。この拡散係数の特徴は、含水率が少ない場合は小さい値をとり（青線）、含水率が多くなるにつれて急激に増加する（ピンク線）ことである。水の拡散係数 λ を含水率 ψ_w の関数とみなすと、これは図2, 3と同様のグラフになる。このことから、水の拡散方程式は多孔質媒体への水分浸透を記述することが期待される。

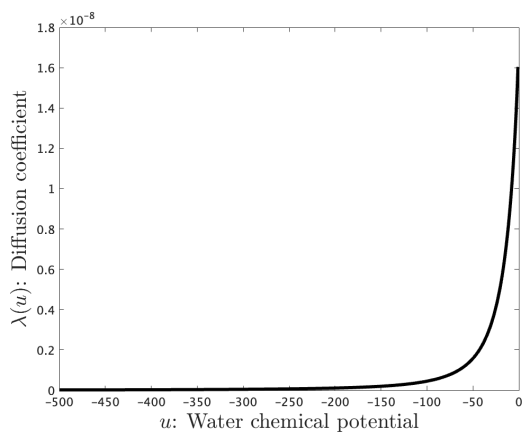


図2 λ のグラフ ([3])

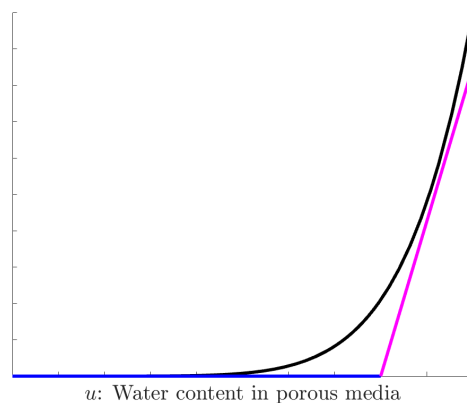


図3 多孔質媒体内の液体浸透に関する拡散係数

境界条件はレンガ下面 $x = 0$ では流束が0 (式 (3)), レンガ上面 $x = 1$ では流束が圧力差に比例する (式 (4)) と仮定している。また、初期条件 (5) としてレンガが乾燥している状態を考えている。他にも、毛管圧の定義式や乾燥気体の状態方程式 (6) を与えている。

Fukui らの論文ではレンガ下面を断湿処理し、レンガ上面に水の層がある状態で水の浸透実験を行っている。

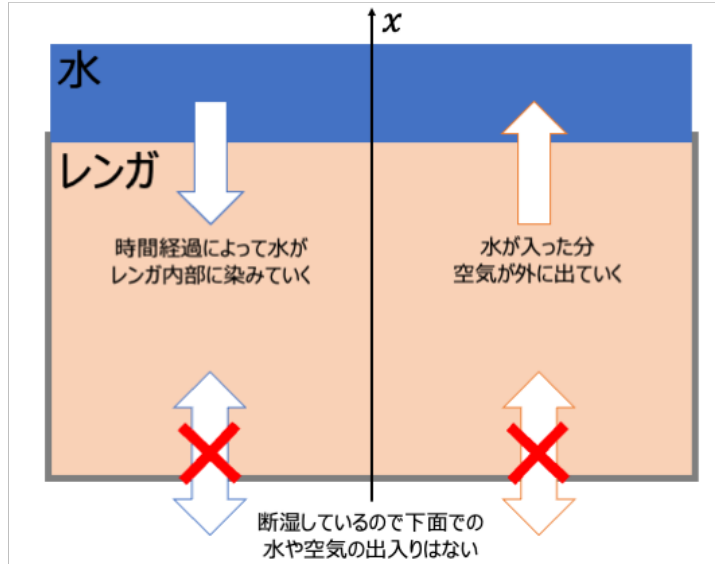


図 4 Fukui らの実験

さらにこの実験結果と数理モデル (1)–(6) の数値計算結果を比較し、実験的立場からこの数理モデルの妥当性を示している。一方, Fukui らの数理モデルに対する解の存在やその挙動といった数学的基礎理論は十分に整備されていないのが現状である。

本研究では, Fukui らの数理モデル (1)–(6) において, 空気密度が空気の含有率に比例する, つまり $\rho_a = \frac{\psi_a}{\phi} \rho_a^*$ (ρ_a^* : 最大空気密度) であると仮定し, ψ_w , λ , k を一般化した初期値境界値問題の数学的解析を行なった。

2 問題設定

以下の非線形拡散を持つ放物型偏微分方程式系の初期値境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \partial_t f(u) = \partial_x(\lambda(f(u))(\partial_x u + C^* \partial_x v)), \\ \partial_t g(v) = \partial_x(k(f(u))\partial_x v) & \text{in } Q(T) := (0, T) \times (0, 1), \\ \partial_x u = 0, \partial_x v = 0 & \text{at } x = 0, t \in (0, T), \\ -\lambda(f(u))(\partial_x u + C^* \partial_x v) = \kappa_u^*(u - u_b^*), \\ -k(f(u))\partial_x v = \kappa_v^*(v - v_b^*) & \text{at } x = 1, t \in (0, T), \\ u(0, x) = u_0(x), v(0, x) = v_0(x) & \text{for } x \in (0, 1). \end{cases} \quad (\text{P})$$

ここで, $u, v : Q(T) \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数, $u_0, v_0 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数, C^*, κ_u^* は非負の定数, u_b^*, κ_u^*, v_b^* は正定数である。また, $f, \lambda, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はある正定数 $C_f, C_{1\lambda}, C_{2\lambda}, C_{1k}, C_{2k}$ に対して以下の仮定を満たす。

$f, \lambda, k \in C^1(\mathbb{R})$ であり, $\mathbb{R}$ 上で

$$f \geq 0, \quad 0 \leq f' \leq C_f, \quad C_{1\lambda} \leq \lambda \leq C_{2\lambda}, \quad |\lambda'| \leq C_{2\lambda}, \quad C_{1k} \leq k \leq C_{2k}, \quad |k'| \leq C_{2k}.$$

さらに, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(r) = ([r]^+)^2, \quad r \in \mathbb{R}$$

と定義する. ただし $[r]^+ = \max\{r, 0\}$ である.

問題 (P) は, Fukui らのモデルにおいて前節で述べた空気密度に関する物理的仮定を課し, 水分化学ポテンシャル u と空気の含有率 ψ_a を未知関数とすることで導出できる. また, 問題 (P) の u に関する方程式 (第一式) は楕円-放物型である. 楕円-放物型方程式とは時間退化する放物型方程式で, これまで [1, 7, 10] など考察されている. 本研究における関数 f の代表例は図 1 をグラフにもつ含水率 ψ_w のような有界関数である. このような f は $\mathbb{R}$ で逆関数を持たないため, 未知関数の変換に基づく解析が極めて困難である. これは他の楕円-放物型方程式にも現れる大きな特徴の 1 つである. 本研究では, この困難を Robin 型境界条件を活用して得られる評価によって解消している.

筆者はこれまで多孔質媒体中の水分拡散のみに焦点を当てた方程式の数学的解析を行ってきた [8, 9]. そこで非単調な境界条件をもつ初期値境界値問題に対し, 有限体積法による近似が有効であった. このような背景を踏まえ, 本研究では有限体積法によって構成される近似解を用いて問題 (P) の弱解の存在を示した.

3 主結果

問題 (P) の弱解を次のように定義する.

定義. $T > 0$ に対し $Q(T)$ 上の関数の組 (u, v) が次の条件を満たすとき, (u, v) を $[0, T]$ 上の (P) の弱解という: $u, v \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1))$ であり, $\eta(T) = 0$ を満たす任意の $\eta \in W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1))$ に対して

$$\begin{aligned} & - \int_{Q(T)} f(u) \partial_t \eta dx dt + \int_{Q(T)} \lambda(f(u)) (\partial_x u + C^* \partial_x v) \partial_x \eta dx dt + \int_0^T \kappa_u^*(u(t, 1) - u_b^*) \eta(t, 1) dt \\ & \quad = \int_0^1 f(u_0) \eta(0, x) dx, \\ & - \int_{Q(T)} g(v) \partial_t \eta dx dt + \int_{Q(T)} k(f(u)) \partial_x v \partial_x \eta dx dt + \int_0^T \kappa_v^*(v(t, 1) - v_b^*) \eta(t, 1) dt \\ & \quad = \int_0^1 g(v_0) \eta(0, x) dx. \end{aligned}$$

この定義のもと, 弱解の存在に関して次の定理が得られた.

主定理. $u_0 \in L^2(0, 1)$, $v_0 \in L^\infty(0, 1)$, $0 \leq v_0 \leq v_b^*$ とする. このとき, 任意の $T > 0$ に対し, $[0, T]$ 上の (P) の弱解 (u, v) が存在する. さらに, v は任意の $t \in [0, T]$ に対して $0 \leq v(t) \leq v_b^*$ を満たす.

論文 [8, 9] では f が狭義単調増加であることを仮定していたが, 本研究の主定理ではそれを仮定していないことに注意する. また, v の方程式の拡散係数 $k(f(u))$ は u に依存しているため, 正則性の観点から強解の存在を示すことは現状難しい.

4 有限体積法による空間離散化

有限体積法とは、偏微分方程式の空間離散化手法の 1 つである [12]。具体的な操作としては、空間領域を小さいセル (コントロールボリューム) に分割し、支配方程式の空間変数に関する積分形を各コントロールボリュームごとに離散近似する。これによって時間変数に関する常微分方程式系が得られる。有限体積法の最大の特徴は、各コントロールボリュームごとに保存則が成り立つことである。そのため、質量や運動量、熱量といった物理量が保存されるため、熱流体解析において広く利用されている。本研究の主定理の証明では有限体積法で得られた常微分方程式系の解を使って単関数列を構成し、近似パラメータに関する一様評価を示すことが鍵となる。

離散化するための準備として関数 f, g を次の関数 $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ でそれぞれ近似する。

$$f_\varepsilon(r) = f(r) + \varepsilon r, \quad g_\varepsilon(r) = g(r) + \varepsilon r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

ただし、 $0 < \varepsilon < 1$ である。また、 g_ε^b を

$$g_\varepsilon^b(r) = \begin{cases} 2v_b^*r - v_b^{*2} + \varepsilon r, & r > v_b^*, \\ r^2 + \varepsilon r, & 0 \leq r \leq v_b^*, \\ \varepsilon r, & r < 0 \end{cases}$$

と定義する。問題 (P) において f, g を $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ に置き換えた問題を (P_ε) 、 $f_\varepsilon, g_\varepsilon^b$ に置き換えた問題を (P_ε^b) とする。また、領域 $(0, 1)$ を n 等分し、有限体積法によって (P_ε^b) を空間離散化して得られる常微分方程式系 (+ 適当な初期条件) を $(OP_\varepsilon^b)^{(n)}$ とする。

$$f'_\varepsilon(u_i^{(n)})(u_i^{(n)})' = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \lambda((f_\varepsilon(u))_{1+\frac{1}{2}})(\delta_x u_1^{(n)} + C^* \delta_x v_1^{(n)}) & \text{if } i = 1, \\ \frac{1}{\Delta x} \left(\lambda((f_\varepsilon(u))_{i+\frac{1}{2}})(\delta_x u_i^{(n)} + C^* \delta_x v_i^{(n)}) \right. \\ \quad \left. - \lambda((f_\varepsilon(u))_{i-1+\frac{1}{2}})(\delta_x u_{i-1}^{(n)} + C^* \delta_x v_{i-1}^{(n)}) \right) & \text{if } 2 \leq i \leq n-1, \\ -\frac{1}{\Delta x} \left(\kappa_u^*(u_n^{(n)} + C^* v_n^{(n)} - u_b^*) \right. \\ \quad \left. + \lambda((f_\varepsilon(u))_{n-1+\frac{1}{2}})(\delta_x u_{n-1}^{(n)} + C^* \delta_x v_{n-1}^{(n)}) \right) & \text{if } i = n, \end{cases}$$

$$g'_\varepsilon(v_i^{(n)})(v_i^{(n)})' = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} k((f_\varepsilon(v))_{1+\frac{1}{2}}) \delta_x v_1^{(n)} & \text{if } i = 1, \\ \frac{1}{\Delta x} \left(k((f_\varepsilon(v))_{i+\frac{1}{2}}) \delta_x v_i^{(n)} - k((f_\varepsilon(v))_{i-1+\frac{1}{2}}) \delta_x v_{i-1}^{(n)} \right) & \text{if } 2 \leq i \leq n-1, \\ -\frac{1}{\Delta x} \left(\kappa_v^*(v_n^{(n)} - v_b^*) + k((f_\varepsilon(v))_{n-1+\frac{1}{2}}) \delta_x v_{n-1}^{(n)} \right) & \text{if } i = n. \end{cases}$$

以下、 $(OP_\varepsilon^b)^{(n)}$ の導出過程を説明する。まず、 Δx を空間分割幅、つまり $\Delta x = \frac{1}{n}$ とする。また、コントロールボリュームである区間 $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ における u, v の近似値をそれぞれ

$$u \simeq u_i^{(n)}, \quad v \simeq v_i^{(n)}$$

とする. さらに, 隣接する近似値 $w_{i-1}^{(n)}$, $w_i^{(n)}$, $w_{i+1}^{(n)}$ ($w = u, v$) に対して

$$\delta_x w_i = \frac{w_i^{(n)} - w_{i-1}^{(n)}}{\Delta x}, \quad w_{i+\frac{1}{2}} = \frac{w_i^{(n)} + w_{i+1}^{(n)}}{2},$$

と定義する. 次に問題 (P_ε^b) の u の方程式の両辺を区間 $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ で積分する.

$$\int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \partial_t f(u) dx = \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \partial_x (\lambda(f(u))(\partial_x u + C^* \partial_x v)) dx.$$

最後に, 拡散係数 $\lambda(f(u))$ については区間 $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ において

$$\lambda(f(u)) \simeq \lambda((f(u))_{i+\frac{1}{2}}),$$

と近似し, 空間一階微分を中心差分近似することで $\{u_i^{(n)}\}_i$ の方程式が得られる. 同様にして, $\{v_i^{(n)}\}_i$ の方程式も導出することができる. このようにして得られる $(OP_\varepsilon^b)^{(n)}$ の時間大域解の存在はピカールの定理より容易に示される.

5 主定理の証明

まず, $(OP_\varepsilon^b)^{(n)}$ の解を $\{(u_i^{(n)}, v_i^{(n)})\}$, χ_i を $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ の特性関数として,

$$u^{(n)}(t, x) = \sum_{i=1}^n \chi_i(x) u_i^{(n)}(t), \quad v^{(n)}(t, x) = \sum_{i=1}^n \chi_i(x) v_i^{(n)}(t),$$

と定める. 問題 $(OP_\varepsilon^b)^{(n)}$ の $v^{(n)}$ に関する式に $[-v^{(n)}]^+$, $[v^{(n)} - v_b^*]^+$ をそれぞれかけて積分すると以下の不等式が得られる.

$$0 \leq v^{(n)} \leq v_b^* \quad \text{a.e. on } Q(T). \quad (7)$$

よって

$$g_\varepsilon^b(v^{(n)}) = g_\varepsilon(v^{(n)}) = (v^{(n)})^2 + \varepsilon v^{(n)}$$

が成り立つ.

次に,

$$U^{(n)} = f_\varepsilon(u^{(n)}), \quad V^{(n)} = g_\varepsilon(v^{(n)})$$

とおく. また, 空間に関する単関数 $w^{(n)}$ に対して, $\tilde{w}^{(n)}$ を以下のように定義する.

$$\tilde{w}^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < \Delta x, \\ \frac{w^{(n)}(x) - w^{(n)}(x - \Delta x)}{\Delta x} & \text{if } \Delta x \leq x \leq 1. \end{cases}$$

問題 $(OP_\varepsilon^b)^{(n)}$ の $u^{(n)}, v^{(n)}$ に関する方程式に $u^{(n)}, v^{(n)}$ をそれぞれかけて積分すると次の n, ε に関する一様評価が得られる: 任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$|U^{(n)}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t |\tilde{u}^{(n)}(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^t |u^{(n)}(\tau, 1)|^2 d\tau \leq C, \quad (8)$$

$$|V^{(n)}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t |\tilde{v}^{(n)}(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \leq C. \quad (9)$$

ただし, C は T に依存する. さらに, 次の補題を用いる.

補題 1. $w^{(n)}$ を $(0, 1)$ 上の単関数とする. 次の不等式が成り立つ.

$$|w^{(n)}|_{L^2(0,1)}^2 \leq (|\tilde{w}^{(n)}|_{L^2(0,1)}^2 + |w^{(n)}(1)|^2)^2.$$

補題 1 と (7), (8), (9) より, 任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$\begin{aligned} \int_0^t |u^{(n)}(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau &\leq C, \\ \int_0^t |v^{(n)}(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau &\leq C. \end{aligned}$$

また, $(\text{OP}_\varepsilon^b)^{(n)}$ の $u^{(n)}, v^{(n)}$ に関する方程式に $\eta \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$ をかけて積分すると次の評価が得られる.

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q(T)} \partial_t U^{(n)} \eta dx dt \right| &\leq C |\eta|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}, \\ \left| \int_{Q(T)} \partial_t V^{(n)} \eta dx dt \right| &\leq C |\eta|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}. \end{aligned}$$

次に, 以下の離散版 Aubin のコンパクト定理に相当する補題を用いて, 強収束部分列の存在を示す.

補題 2 ([4]). $Q(T)$ 上の関数 $z^{(n)}$ は空間変数に関して単関数とする. さらに, $\{z^{(n)}\}$ は $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ で有界, $\{\tilde{z}^{(n)}\}$ は $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ で有界, $\{z_t^{(n)}\}$ は $L^2(0, T; H^1(0, 1)^*)$ で有界とする. このとき, $z^{(n_j)} \rightarrow z$ in $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ ($j \rightarrow \infty$) となるような $\{z^{(n)}\}$ の部分列 $\{z^{(n_j)}\}$ と $z \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ が存在する.

$\{U^{(n)}\}, \{V^{(n)}\}$ に対してこの補題 2 を適用すると $U^{(n_j)}$ が U に, $V^{(n_j)}$ が V に $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ で強収束する $\{U^{(n)}\}, \{V^{(n)}\}$ の部分列 $\{U^{(n_j)}\}, \{V^{(n_j)}\}$ と $U, V \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ が得られる. この部分列の極限をとることで (P_ε) の弱解の存在が示せる. (P_ε) の解を $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ とすると, $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ に関しても (n) 付きの評価と同様の評価が得られる. したがって, 連続版 Aubin のコンパクト定理と極大単調作用素の性質より, 部分列をとることで (P) の弱解の存在が示せる.

参考文献

- [1] H. W. Alt, S. Luckhaus, *Quasi-linear elliptic-parabolic differential equations*, Math. Z., **183**(1983), pp. 311–341.
- [2] The porous medium equation, Nonlinear diffusion problems, Lecture notes in mathematics, **1224**(1985), pp. 1–46.
- [3] K. Fukui, C. Iba, S. Hokoi, D. Ogura, *Effect of air pressure on moisture transfer inside porous building materials*, J. Environ. Eng., AIJ, **83**(2018), pp. 39–47.
- [4] T. Gallouët, J. C. Latché, *Compactness of discrete approximate solutions to parabolic PDEs - Application to a turbulence model*, Commun. Pure Appl. Anal., **11**(2012), pp. 2371–2391.
- [5] C. Gavioli, P. Krejčí, *Phase transitions in porous media*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., **29**(2022), 72.

- [6] D. W. Green, H. Dabiri, C. F. Weinaug, R. Prill, *Numerical modeling of unsaturated ground-water flow and comparison of the model to a field experiment*, Water Resources Research, **6**(1970), pp. 862–874.
- [7] N. Kenmochi, I. Pawlow, *A class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time dependent constraints*, Nonlinear Anal. TMA., **10**(1986), pp. 1181–1202.
- [8] A. Morimura, T. Aiki, *Solvability of the moisture transport model for porous materials*, Adv. Math. Sci. Appl., **33**(2024), pp. 501–524.
- [9] A. Morimura, T. Aiki, *Convergence of approximate solutions constructed by the finite volume method for the moisture transport model in porous media*, in preparation.
- [10] F. Otto, *L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations*, J. differ. equ. **131**(1996), pp. 20–38.
- [11] A. Suzuki, Y. Niibori, S. A. Fomin, V. A. Chugunov, T. Hashida, *Analysis of Water Injection in Fractured Reservoirs Using a Fractional-Derivative-Based Mass and Heat Transfer Model*, Math. Geosci., **47**(2015), pp. 31–49.
- [12] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, 数值流体力学: 第 2 版 , 丸善出版 (2007).